2009 – 2013 годы (госконтракты 02.740.11.0429 и 16.740.11.0127) и РФФИ (проект 10-01-00717).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г. *Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления* // Сиб. журн. индустр. мат. – 2004. – Т. 7. – № 1. – С. 73-94.

2. Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е. *Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом* // Сиб. матем. журн. – 2006. – Т. 47. – № 1. – С. 58-68.

3. Демиденко Г. В., Мельник И. А. *Об одном способе аппроксимации решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом* // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 51. – № 3. – С. 528-546.

Е. В. Десяев

Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, desyaev@rambler.ru

ГОМЕОМОРФИЗМ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ АСИМПТОТИЧЕСКИ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим дифференциальные уравнения

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x), \tag{1}$$

и

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y, \tag{2}$$

где $x, y \in \mathbb{R}^n$, $T \leqslant t < +\infty$, $A(t) \subset [\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n]$ — банахова алгебра эндоморфизмов; $f : [T, +\infty)\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C([T, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$.

Пусть $Y(t)$ — фундаментальная матрица уравнения (2), нормированная в точке t_0, $Y(t_0) = E$, а для матрицы Коши $K(t,s) = Y(t)Y^{-1}(s)$, $t \geqslant s$ справедливо неравенство

$$||Y(t)Y^{-1}(s)|| \leqslant Q(t-s), t \geqslant s, \tag{3}$$

где $Q : [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ — непрерывная, неубывающая функция. Пусть еще

$$\frac{Q(t-s)}{Q(t-t_0)} \leqslant Q_1(t_0 - s), \tag{4}$$

где $Q_1 : (-\infty, +\infty) \to (0, +\infty)$ — также непрерывная, неубывающая функция.

Теорема 1. *Пусть* $||f(t,x)|| \leqslant \lambda(t, ||x||)$, $\lambda : [T, +\infty) \times \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $\lambda \in C([T, +\infty) \times [0, +\infty))$, $\lambda(t, \alpha_1) \leqslant \leqslant \lambda(t, \alpha_2)$ *при* $\forall t \in [T, +\infty)$ *и* $\alpha_1 \leqslant \alpha_2$. *Тогда, если:*

1) *выполняются условия* (3), (4) *и при* $\forall \alpha \in [0, +\infty)$ *существует* $J(\alpha) = \int\limits_{t_0}^{+\infty} Q_1(t_0 - s)\lambda(s, \alpha Q(s - t_0))ds$;

2) $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{d\alpha}{J(\alpha)} = +\infty$;

3) $q(t, \alpha) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\lambda_1(t_1, \alpha)}{J(\alpha)} dt_1$ *при всех* $t \in [T, +\infty)$ *является неубывающей функцией по переменной* α, $\lambda_1(t, \alpha) = = Q_1(t_0 - t)\lambda(t, \alpha Q(t - t_0))$, *то для решений уравнения* (1) *справедливо неравенство*

$$||x(t : t_0, x_0)|| \leqslant D(r)Q(t - t_0)$$

при $||x_0|| \leqslant r$, $t \geqslant t_0 \geqslant T_0 \geqslant T$, $D(r) \geqslant 0$.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1 *и*

1) $\int\limits_{t_0}^{t} ||Y(t)J_1Y^{-1}(s)||\lambda(s, \alpha Q(s-t_0))ds = o(\alpha Q(t-t_0))$ *при* $t \to +\infty$ *равномерно относительно* $\alpha \geqslant 0$;

2) $\int\limits_{t_0}^{+\infty} ||J_2Y^{-1}(s)||\lambda(s, \alpha Q(s-t_0))ds < +\infty$ *при* $\forall \alpha \in \mathbb{R}^1_+$;

3) $\int\limits_{t}^{+\infty} ||Y(t)J_2Y^{-1}(s)||\lambda(s, \alpha Q(s-t_0))ds = o(\alpha Q(t-t_0))$ *при* $t \to +\infty$ *равномерно относительно* $\alpha \geqslant 0$.

Тогда уравнения (1) *и* (2) *асимптотически эквивалентны по Брауеру* [1], [2] *относительно функции* $Q(t-t_0)$. *Кроме того, существует такое отображение* $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *что*

$$x(t : t_0, x_0) = y(t : t_0, Px_0) + o(Q(t-t_0))$$

при $t \to +\infty$ *равномерно относительно* $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $\Omega = \{\varphi(t) : ||\varphi(t)|| \leqslant DQ(t-t_0), t \geqslant t_0\}$ — множество всех вектор-функций $\varphi(t)$, $\dim \varphi(t) = n$, непрерывных на $[t_0, +\infty)$ и равномерно ограниченных по норме выражением $DQ(t-t_0)$, где D — некоторое произвольное положительное число, т. е. $||\varphi(t)|| \leqslant D(r)Q(t-t_0)$, если $||\varphi(t_0)|| \leqslant r$.

Множество Ω — линейное пространство, и если допустить, что

$$||\varphi||_\Omega = \sup_{t \geqslant t_0} \frac{||\varphi(t)||}{Q(t-t_0)},$$

то Ω будет банаховым пространством. На Ω определим оператор

$$L\varphi(t) = Y(t)y(t_0) + Y(t)\int\limits_{t_0}^{t} J_1Y^{-1}(s)f(s,\varphi(s))ds -$$
$$- Y(t)\int\limits_{t}^{+\infty} J_2Y^{-1}(s)f(s,\varphi(s))ds. \quad (6)$$

Теорема 3. *Пусть выполняются все условия теоремы 2 и существует функция* $\lambda_1 : [T, +\infty) \times [0, +\infty) \times [0, +\infty) \to \to [0, +\infty)$, *такая, что*

1) $||f(t, x_1) - f(t, x_2)|| \leqslant \lambda_1(t, ||x_1||, ||x_2||)||x_1 - x_2||\ \forall x_1, x_2 \in \in \mathbb{R}^n$;

2) $\lambda_1(t_1, \alpha_1, \alpha_2) \leqslant \lambda_1(t, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2)$ *при* $\forall t \geqslant T$, *если* $\alpha_i \leqslant \bar{\alpha}_i$ $(i = 1, 2)$;

3) *существует такое* $t_0 \geqslant T_0$, *что*

$$\int_{t_0}^{t} ||Y(t)J_1Y^{-1}(s)||\lambda_1(s, \alpha Q, \alpha Q)ds + \\ + \int_{t}^{+\infty} Q(s - t_0)||J_2Y^{-1}(s)||\lambda_1(s, \alpha Q, \alpha Q)ds < 1$$

при всех $\alpha \in \mathbb{R}^1_+$.

Тогда уравнения (1) *и* (2) *асимптотически эквивалентны по Левинсону* [2] *относительно функции* $Q(t - t_0)$, *т. е. отображение* P *устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками* $\mathbb{R}^n$.

Из теоремы 3 вытекает существование такого взаимнооднозначного соответствия $\Phi(t_0, x_0)$ $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^n$, что если $\Phi(t, x(t : t_0, x_0))$ — решение уравнения (1), то $\Phi^{-1}(t, x(t : t_0, x_0))$ является решением уравнения (2) и, наоборот, если имеем решение уравнения (2), то $\Phi^{-1}(t, y(t : t_0, y(t_0),))$ удовлетворяет уравнению (1). Кроме того, $||x(t : t_0, x_0) - - y(t : t_0, y_0)|| = o(Q(t - t_0))$, при $t \to +\infty$.

Такое соответствие вытекает из соотношения

$$y(t:t_0,y_0)=\Phi(t,x(t:t_0,x_0))=$$
$$=x(t:t_0,x_0)-\int\limits_{t_0}^{t}Y(t)J_1Y^{-1}(s)f(s,x(s:t_0,x_0))ds+$$
$$+\int\limits_{t}^{+\infty}Y(t)J_2Y^{-1}(s)f(s,x(s:t_0,x_0))ds,$$

где $y_0=\Phi(t_0,x_0)=x_0+\int\limits_{t_0}^{+\infty}J_2Y^{-1}(s)f(s,x(s:t_0,x_0))ds.$

Пусть решения уравнения (1) равномерно ограничены на любом множестве $S=\{y:\|y\|\leqslant r\}$, т. е. $\|y(t:t_0,y_0)\|\leqslant c(r)<<+\infty$ при $y_0\in S$ и $t\geqslant t_0\geqslant T_0$. Тогда $\|Y(t)Y^{-1}(s)\|\leqslant c<+\infty$ при $t\geqslant s$, где c — положительная постоянная.

Теорема 4. *Если выполняются условия теоремы* 3 *и решения уравнения* (2) *равномерно ограничены на любом множестве* $S=\{y:\|y\|\leqslant r\}$, *то*

$$y(t_0)=x(t_0)+\int\limits_{t_0}^{+\infty}J_2Y^{-1}(s)f(s,x(s))ds$$

является гомеоморфизмом, отображающим пространство $\mathbb{R}^n$ *на себя так, что через соответствующие точки в начальный момент проходят решения* $x(t:t_0,x_0)$ *и* $y(t:t_0,y_0)$ *уравнений* (1) *и* (2), *удовлетворяющие условию* $\|x(t:t_0,x_0)-y(t:t_0,y_0)\|\to 0$ *при* $t\to+\infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Brauer P. *Asymptotic equivalence and asymptotic behaviour of linear systems* // Michigan Math. J. – 1962. – V. 9. – P. 33-43.

2. Воскресенский Е. В. *Методы сравнения в нелинейном анализе.* – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1990. – 224 с.

А. Ю. Долгоносова

Нижегородский национальный исследовательский университет им. Н. И. Лобачевского, dolgonosova@rambler.ru

О ПСЕВДОРИМАНОВЫХ СЛОЕНИЯХ

Пусть (M, F) — слоение, заданное T-коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}$, где $i, j \in J$, а T — многообразие размерности q. Это означает, что U_i, $i \in J$, — открытое покрытие M; $f_i : U_i \to T$ — субмерсии со связными слоями; если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то определены такие биекции $\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \to f_i(U_i \cap U_j)$, что $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ на $U_i \cap U_j$.

Если на многообразии T существует такая псевдориманова метрика, что каждое локальное преобразование γ_{ij} является изоморфизмом псевдоримановых многообразий, индуцированных на соответствующих открытых подмножествах, то слоение (M, F) называется псевдоримановым. Подчеркнем, что лоренцевы и римановы слоения образуют подклассы псевдоримановых слоений.

Нами доказан следующий критерий псевдоримановости гладкого слоения произвольной коразмерности.

Теорема 1. *Для того чтобы произвольное гладкое слоение (M, F) было псевдоримановым, необходимо и достаточно, чтобы на многообразии M существовала такая псевдориманова метрика g, что любая геодезическая псевдориманова многообразия (M, g), ортогональная слоению (M, F) в одной точке, оставалась ортогональной этому слоению в каждой своей точке.*